MP* : Bonus *

Exercice 1. Énoncer et démontrer le théorème d'équivalence des normes en dimension finie (X - 2016). Montrer que ce résultat tombe en défaut sur un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension ≥ 2 (Ulm - 2016).

Exercice 2 *(Une réciproque au théorème de Heine - Ulm 2016).* Énoncer et démontrer le théorème de Heine (sur $\mathbb{R}$). Réciproquement, quels sont les sous-ensembles $H \subset \mathbb{R}$ tels que toute fonction continue $f : H \to \mathbb{R}$ soit uniformément continue ?

Exercice 3 *(Théorème d'Ascoli).* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans lui même. Soit $A \subset \mathbb{R}$.

1) On suppose que pour tout $x \in A$, $\exists M_x > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|f_n(x)| \leq M_x.$$
On suppose A fini ou dénombrable. Montrer que l'on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge simplement sur A.

2) On ajoute l'hypothèse *d'équicontinuité* de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$
Montrer que l'on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que la convergence est uniforme sur tout compact.

Pour montrer ce second point, on remplacera la définition de l'équicontinuité par une définition "uniforme" (équivalente sur les compacts par le théorème de Borel Lebesgue) : Si $a < b$,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in [a,b],\ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

3) Réciproquement, on suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact. Montrer que la suite est uniformément bornée sur tout compact et équicontinue.

Exercice 4 *(La série entière universelle de Mazurkiewicz-Sierpinski).*

1) Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue nulle en 0, $m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que
$$|f(x) - x^m P(x)| \leq \varepsilon,\ \forall x \in [0,1].$$

2) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des polynômes à coefficients rationnels et nuls en 0. Établir l'existence d'une série entière $\sum a_n x^n$ et d'une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant
$$|P_n(x) - s_{\phi(n)}(x)| \leq \frac{1}{n},\ \forall n \geq 1,\ \forall x \in [0,1],$$
où l'on a posé $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

3) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue nulle en 0. Montrer qu'il existe une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(s_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 5. Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est analytique $i.e$ pour tout $x_0 \in I$ il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 sur lequel f est égal à la somme de sa série de Taylor en x_0.

(ii) Pour tout segment $J \subset I$, il existe des constantes $C, r > 0$ telles que,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in J,\ |f^{(n)}(x)| \leq C r^n (n!).$$

On pourra utiliser la propriété de Borel Lebesgue pour traiter le sens compliqué.

*Pour toute information sur les exercices, ou bien sur d'éventuels approfondissements **n'hésitez surtout pas** à m'envoyer un mail à romain.panis@ens.fr

Exercice 6 ***(Ulm 2011).*** Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $N \in \mathcal{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique élément N_k de $\mathcal{N}$ tel que

$$\left(I_n + \frac{N_k}{k}\right)^k = I_n + N.$$

Étudier la limite de $(N_k)_{k\geq 0}$.

Exercice 7 . Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. On suppose que $\exp(A) = \exp(B)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 8 ***(Ulm 2016).*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est une isométrie linéaire pour une norme N.

(ii) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\{A^k X \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$ est borné.

(iii) A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec des valeurs propres de module 1.

Corrections

Exercice 1. Il a été demandé à l'oral de Polytechnique de démontrer le délicat théorème d'équivalence des normes en dimension finie sur un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel : il peut être intéressant d'en apprendre la preuve dans l'optique de la préparation de l'oral. On en fournit une preuve rapide, on pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on note N un norme quelconque sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Fixons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et introduisons la norme $\|.\|_1$ définie pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Nous allons établir que N et $\|.\|_1$ sont équivalentes (c'est suffisant par transitivité de la relation d'équivalence sur les normes). Observons déjà que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$,

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n N(e_i)|x_i| \leq \left(\sup_{i=1,\ldots,n} N(e_i)\right) \|x\|_1.$$

Et si $C_1 = \sup_{i=1,\ldots,n} N(e_i) > 0$, on a établit,

$$N \leq C_1 \|.\|_1.$$

L'autre inégalité est nettement plus difficile : c'est dans ce sens que le fait que le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ intervient. On introduit

$$\varphi : \ x \in S(0,1) \mapsto N(x) \in \mathbb{R}_+^*$$

où l'on a noté $S(0,1)$ la sphère unité de $(E, \|.\|_1)$. Observons que φ est continue dans $(E, \|.\|_1)$ (ceci provient essentiellement de l'inégalité précédente qui assure le caractère lipschitzien de N sur l'espace normé $(E, \|.\|_1)$). On sait que $S(0,1)$ est un compact de $(E, \|.\|_1)$ (**c'est ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est absolument essentiel**) car c'est un fermé borné en dimension finie. φ atteint son minimum (qui est strictement positif) par théorème des bornes atteintes, et on a $C_2 > 0$ tel que pour tout $x \in S(0,1)$,

$$C_2 \leq N(x)$$

ce qui donne pour tout $x \neq 0$,

$$C_2 \leq N\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)$$

et donc pour tout $x \in E$,

$$C_2 \|x\|_1 \leq N(x).$$

On en déduit le théorème d'équivalence des normes en dimension finie.

Pourquoi ce résultat devient-il faux sur une $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension ≥ 2 ? Pour le voir il faut comprendre que la sphère unité de $\mathbb{Q}^2$ (ou même $\mathbb{Q}^n$) muni de la norme $\|.\|_1$ n'est plus compacte car (c'est l'idée) $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. Supposons par l'absurde le théorème d'équivalence des normes en dimension finie vrai sur $\mathbb{Q}^2$. On vérifie aisément que l'application $N : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}^+$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ par $N(x, y) = |x + \sqrt{2}y|$ est une norme sur $\mathbb{Q}^2$. Ce n'est évidemment pas une norme sur $\mathbb{R}^2$ car en prolongeant N à $\mathbb{R}^2$ on voit que $N(2, -\sqrt{2}) = 0$. L'idée est que dans l'éventualité où les normes seraient équivalentes sur $\mathbb{Q}^2$, on aurait $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_1\|.\|_\infty \leq N \leq C_2\|.\|_\infty.$$

On a noté $\|.\|_\infty$ la norme infinie sur $\mathbb{Q}^2$. Prenons $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui tend vers $-\sqrt{2}$. On a pour $n \in \mathbb{N}$ (assez grand),

$$2C_1 \leq |2 + r_n\sqrt{2}|.$$

Le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ce qui donne une absurdité. En bref, retenir que $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ et donc la notion de compacité "disparaît" ce qui empêche d'appliquer la preuve développée plus haut.

Exercice 2. L'exercice qui suit est très intéressant (au moins d'un point de vue culturel) et propose une forme de réciproque au célèbre théorème de Heine. On commence par rappeler son énoncé :

Théorème (Heine - 1872). Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est uniformément continue sur K.

Preuve du théorème. On raisonne par l'absurde. Si f n'est pas uniformément continue, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe $(x, y) \in K^2$ avec $|x - y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. On en déduit l'existence de deux suites (x_n) et $(y_n) \in K^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \geq 0$,

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{2^n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

Par compacité de K^2 on dispose d'une extraction φ pour laquelle les suites $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergent dans K. Leur limite est identique par ce qui précède. En passant à la limite dans l'inégalité de droite on obtient (par continuité de f) une absurdité.

Une réciproque au théorème de Heine. Nous venons d'établir que si une fonction $f : H \to \mathbb{R}$ continue avec H compact de $\mathbb{R}$ alors f est uniformément continue. On se pose un peu la question inverse en cherchant les parties H de $\mathbb{R}$ pour lesquelles toute fonction continue sur H et à valeurs réelles est uniformément continue. On note donc $\mathcal{H}$ l'ensemble des parties $H \subset \mathbb{R}$ vérifiant cette propriété. Observons que si K compact $K \in \mathcal{H}$. Mais $\mathcal{H}$ contient aussi des parties non compactes ! Par exemple il est facile de se convaincre que $\mathbb{Z} \in \mathcal{H}$. Formalisons un peu tout ceci.

- Soit $H \in \mathcal{H}$. Montrons que H est une partie fermée de $\mathbb{R}$. En effet, si par l'absurde $\overline{H} \neq H$, choisissons $a \in \overline{H} \setminus H$ et considérons l'application continue

  $$\varphi : x \in H \mapsto \frac{1}{x - a}.$$

  Cette application n'est clairement pas uniformément continue sur H : absurde.
- On formalise maintenant le fait que $\mathcal{H}$ peut contenir des parties de $\mathbb{R}$ de "même type" que $\mathbb{Z}$ en introduisant un nouveau type de parties de $\mathbb{R}$: on dit que $X \subset \mathbb{R}$ est **(fortement) séparée** si il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

  $$|x - y| < \varepsilon \Rightarrow x = y.$$

  Par exemple, $\mathbb{Z}$ est séparée (prendre $\varepsilon = 1$).
- Nous allons conclure que les éléments de $\mathcal{H}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ de la forme $H = K \cup S$ où K est une partie compacte et S une partie séparée. On raisonne par double inclusion et on commence par montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ s'écrivant sous cette forme est bien dans $\mathcal{H}$: laissé au lecteur (ne pas hésiter à me contacter si vous ne trouvez pas). Soit $H \in \mathcal{H}$, montrons que H s'écrit comme la réunion d'un compact et d'un séparé. Il suffit d'établir l'existence de $A > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $(x, y) \in H \cap (\mathbb{R} \setminus [-A, A])$ on ait $x \neq y \Rightarrow |x - y| \geq \varepsilon$. Dans ce cas H sera la réunion du compact $H \cap [-A, A]$ (H fermé) et du séparé $H \cap (\mathbb{R} \setminus [-A, A])$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'un tel couple (A, ε) n'existe pas.

  On peut donc trouver une suite $(x_n)_{n\geq 0} \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $x_{n+1} - x_n \to 0$ et $|x_n| \to +\infty$. Le classique lemme du soleil levant (ou lemme des pics) permet d'extraire de cette suite une suite (y_n) strictement monotone. Par exemple on peut supposer (y_n) strictement croissante. Il suffit alors d'exhiber une fonction pathologique. Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq y_0$, $f(y_n) = n$ et f affine sur les $[y_n, y_{n+1}]$.

Observons que f est continue sur $\mathbb{R}$, sa restriction à H, toujours notée f est elle aussi continue. Comme H est un élément de $\mathcal{H}$, f doit être uniformément continue or ce n'est clairement pas le cas car

$$f(y_{n+1}) - f(y_n) = 1, \forall n \geq 0 \quad \text{et} \quad y_{n+1} - y_n \to 0.$$

On a obtenu la contradiction recherchée.

Exercice 3. Cet exercice démontre un résultat extrêmement classique et mérite une petite introduction. Vous avez pu voir dans votre cours de topologie que les compacts en dimension finie étaient exactement les fermés bornés. Une question naturelle apparaît alors : lorsque l'on passe en dimension infinie, que faut-il rajouter comme hypothèse sur une partie X de notre espace pour qu'elle soit compacte ? On se propose ici de répondre à cette question dans le cas de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et on démontre que les parties compactes de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ sont exactement les fermés bornés *équicontinus*. On peut s'intéresser à d'autres espaces normés de dimension infinie. Par exemple si vous êtes vraiment intéressés par cette problématique, je vous recommande d'essayer de chercher les parties compactes de $(\ell^1(\mathbb{C}), \|.\|_1)$ où $\ell^1(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des suites complexes sommables.

1) La méthode utilisée pour cette première question est absolument essentielle et doit être parfaitement maitrisée dans l'optique de la préparation du concours X/ENS. Supposons d'abord A finie. On note $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$. On sait que $K := [-M_{\alpha_1}, M_{\alpha_1}] \times \dots \times [-M_{\alpha_p}, M_{\alpha_p}]$ est compact (produit de compacts). La suite $(f_n(\alpha_1), \dots, f_n(\alpha_p))_{n\in\mathbb{N}} \in K$ à valeurs dans un compact admet une valeur d'adhérence et on en déduit l'existence de $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction, et $(a_1, \dots, a_p) \in K$ tel que

$$(f_{\varphi(n)}(\alpha_1), \dots, f_{\varphi(n)}(\alpha_p)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (a_1, \dots, a_p).$$

D'où le résultat. Bien retenir que le fait d'extraire sur un produit fini de compact revient à faire p extractions successives. Pour le cas où A est infini on a recourt au célèbre procédé diagonal de Cantor.

Supposons donc A infini (dénombrable) et posons $A = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On construit par récurrence une suite $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'extractions telles que pour tout $n \geq 0$

- La suite $(f_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_n(k)}(\alpha_n))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\alpha_n^{(\infty)}$.

La construction d'une telle suite est une simple récurrence avec extraction successive. L'important est ce qui suit : une fois une telle suite construite, on définit pour $n \geq 0$,

$$\psi(n) = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n).$$

On remarque alors que par construction, pour tout $k \geq 0$,

$$f_{\psi(n)}(\alpha_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha_k^{(\infty)}.$$

D'où le résultat recherché.

2) On commence par appliquer la question 1) avec $A = \mathbb{Q}$ et on dispose donc d'une extraction φ telle que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{Q}$. Montrons que cette suite converge aussi simplement sur $\mathbb{R}$ avec l'hypothèse supplémentaire d'équicontinuité. La suite (g_n) est encore équicontinue. soit $\varepsilon > 0$, soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |g_n(x) - g_n(y)| \leq \varepsilon.$$

On montrer que la suite $(g_n(x))$ converge en montrant qu'elle est de Cauchy. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et r un rationnel tel que $|x - r| \leq \eta$. On écrit,

$$|g_p(x) - g_q(x)| \leq |g_p(x) - g_p(r)| + |g_p(r) - g_q(r)| + |g_q(r) - g_q(x)| \leq 2\varepsilon + |g_p(r) - g_q(r)|.$$

Comme la suite $(g_n(r))$ converge, elle est de Cauchy et pour $p, q \geq N$ assez grand on a donc

$$|g_p(x) - g_q(x)| \leq 3\varepsilon.$$

D'où le résultat. On montre à présent que la convergence est uniforme sur tout compact. On fixe $K = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (il suffit de traiter ce cas là). Soit $\varepsilon > 0$. Observons déjà qu'en notant g la limite simple de (g_n) sur $\mathbb{R}$, alors $((g_n)_{n\in\mathbb{N}}, g)$ est équicontinue. On utilise la correction de l'énoncé dans la définition de l'équicontinuité sur les compacts. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$,pour tout $n \geq 0$

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |g_n(x) - g_n(y)| \leq \varepsilon$$

et
$$|x-y| \leq \eta \Rightarrow |g(x)-g(y)| \leq \varepsilon.$$
Fixons $(x_i)_{i=0,\dots,p}$ une subdivision régulière de $[a,b]$ de pas inférieur à η. On se ramène (**méthode importante**) à la convergence sur un nombre fini de point (qui est toujours uniforme). Notons $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $i \in \{0,\dots,p\}$,
$$|g_n(x_i)-g(x_i)| \leq \varepsilon.$$
Soit $x \in [a,b]$ et x_i à au plus η près de x. On écrit, si $n \geq N$,
$$|g_n(x)-g(x)| \leq |g_n(x)-g_n(x_i)| + |g_n(x_i)-g(x_i)| + |g(x_i)-g(x)| \leq 3\varepsilon.$$
Ce qui donne bien la convergence uniforme voulue.

3) Si K un compact sur lequel la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f continue. Observons déjà que
$$\|f_n - f\|_\infty \to 0.$$
Et cette suite est donc bornée par une constante $M > 0$. Donc pour tout $n \geq 0$,
$$\|f_n\|_\infty \leq M + \|f\|_\infty.$$
Montrons que la suite est équicontinue. Soient $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon.$$
De plus pour tout $n \geq 0$ il existe $\eta_n > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$|x-y| \leq \eta_n \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)| \leq \varepsilon.$$
On sait que (f_n) converge uniformément vers f sur $[x-\eta, x+\eta]$. Fixons donc $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $t \in [x-\eta, x+\eta]$,
$$|f_n(t)-f(t)| \leq \varepsilon.$$
Posons $\tilde{\eta} = \min\{\eta, \dots, \eta_N\}$. Alors pour tout $n \geq N$, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$|x-y| \leq \tilde{\eta} \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)| \leq |f_n(x)-f(x)| + |f(x)-f(y)| + |f(y)-f_n(y)| \leq 3\varepsilon.$$
Ceci tient encore si $n \leq N$ d'où le résultat.

Exercice 4. Amateur de résultat mathématique surprenant te voilà servi !

1) Soient f une application continue sur $[0,1]$ et nulle en 0, $m \geq 1$, et $\varepsilon > 0$. Observons déjà qu'il existe une application φ continue sur $[0,1]$ telle que pour tout $x \in [0,1]$,
$$|f(x) - \varphi(x)x^m| \leq \varepsilon.$$
Par continuité en 0 de f, on dispose de $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [0,\delta]$,
$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
Posons pour $x \in [\delta, 1]$,
$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x^m}$$
et si $x \in [0,\delta]$,
$$\varphi(x) = \frac{f(\delta)}{\delta^m}.$$
Alors φ est continue sur $[0,1]$ et vérifie la propriété attendue. En effet si $x \in [\delta,1]$, $f(x) - x^m\varphi(x) = 0$ et si $x \in [0,\delta]$,
$$|f(x) - x^m\varphi(x)| \leq |f(x)| + \left(\frac{x^m}{\delta^m}\right)|f(\delta)| \leq \varepsilon.$$
D'où pour tout $x \in [0,1]$,
$$|f(x) - x^m\varphi(x)| \leq \varepsilon.$$
Pour conclure on utilise d'une part le théorème de Weierstrass pour approcher uniformément φ par une application polynomiale et d'autre par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour justifier que l'on peut choisir le polynôme qui approxime dans $\mathbb{Q}[X]$.

2) Il s'agit de la question difficile de l'exercice. Soit donc $(P_n)_{n\geq 1}$ une énumération de polynômes à coefficients rationnels et nuls en 0. Pour obtenir le résultat on procède de la manière suivante : on construit pas récurrence une suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ de polynômes à coefficients rationnels vérifiant : si $Q_1, \ldots, Q_n$ construits on choisit Q_{n+1} tel que

(i) Q_{n+1} polynôme à coefficients rationnels nul en 0.

(ii) Si $S_n(x) = Q_1(x) + \ldots Q_n(x)$ pour $x \in [0,1]$, on impose $\operatorname{val}(Q_{n+1}) > \deg(S_n)$.

(ii) Pour tout $k \in \{1, \ldots, n+1\}$,

$$\|P_k - S_k\|_\infty \leq \frac{1}{k}.$$

On commence par poser $Q_1(x) = P_1(x)$. Supposons $n \geq 2$ et $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ construits et vérifiant les propriétés précédentes. Notons $m-1$ le degré de S_{n-1}. D'après la question 1) il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que pour tout $x \in [0,1]$,

$$|P_n(x) - S_{n-1}(x) - x^m P(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Posons $Q_n(x) = x^m P(x)$ nul en 0. On a alors

$$\operatorname{val}(Q_n) \geq m > \deg(S_{n-1})$$

et

$$\|P_n - S_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}.$$

D'où la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence.

Comme on a bien fait attention à ne jamais avoir deux polynômes Q_i et Q_j où $i \neq j$ ayant simultanément un coefficient non nul devant un monôme X^k, on peut définir une série entière $\sum a_n x^n$ comme la "somme infinie" $Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots$ telle que si $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, alors on dispose d'une extraction ϕ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$s_{\phi(n)} = S_n.$$

Ceci donne le résultat voulu, à savoir pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \geq 1$,

$$|P_n(x) - s_{\phi(n)}(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

3) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ nulle en 0 et continue. D'après 1), pour tout $n \geq 1$, il existe un entier k_n tel que

$$\|f - P_{k_n}\|_\infty \leq \frac{1}{n}.$$

On peut supposer $k_1 < k_2 < \ldots$. Introduisons une application $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout n, $\Psi(n) = k_n$. D'après la question précédente, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x) - s_{\phi(\Psi(n))}(x)| \leq |f(x) - P_{\Psi(n)}(x)| + |P_{\Psi(n)}(x) - s_{\phi(\Psi(n))}(x)| \leq \frac{2}{n}.$$

Ainsi une sous-suite de $(s_{\phi(n)})$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. On a donc trouvé une suite de fonctions dont l'ensemble des valeurs d'adhérences contient toutes les fonctions continues sur $[0,1]$ et nulles en 0. Pas mal non ?

Exercice 6. Cette exercice utilise une méthode très importante et qui a des nombreuses applications. Sous ses airs d'exercices d'algèbre linéaire il s'agit en fait d'un exercice de séries entières ! Observons tout cela :

Soit $k \geq 1$, notons $f : x \mapsto (1+x)^{1/k}$. f est développable en série entière au voisinage de 0 et on a pour $x \in \mathbb{R}$ convenable (en utilisant la définition usuelle du coefficient binomiale généralisé)

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \binom{1/k}{p} x^p.$$

On écrit sur un voisinage de 0,

$$f(x) = 1 + \varphi(x) + \mathcal{O}(x^n)$$

où $\varphi(x) = \sum_{p=1}^{n-1} \binom{1/k}{p} x^p$. Définissons alors $\varphi : M \in \mathcal{N} \mapsto \varphi(M) \in \mathcal{N}$ et $\Psi : M \in \mathcal{N} \mapsto (I_n + M)^k - I_n \in \mathcal{N}$. Montrons que φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre.

Il suffit de voir que sur un voisinage de 0,

$$1 + x = ((1+x)^{1/k})^k = (1 + \varphi(x) + \mathcal{O}(x^n))^k = (1+\varphi(x))^k + \mathcal{O}(x^n).$$

On peut évaluer ceci en un élément $N \in \mathcal{N}$ et il vient

$$N = \Psi(\varphi(N)).$$

De même,

$$N = \varphi(\Psi(N)).$$

De fait, l'antécédent $\frac{N_k}{k}$ de N par Ψ n'est autre que $\varphi(N)$. D'où, si $k \geq 1$,

$$N_k = k \sum_{p=1}^{n-1} \binom{1/k}{p} N^p.$$

Donc N_k existe et est bien unique. De plus,

$$k \binom{1/k}{p} = k \frac{(1/k)\dots(1/k - p + 1)}{p!} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{(-1)^{p-1}}{p}.$$

En particulier, $(N_k)_{k \geq 1}$ converge et sa limite et ce à quoi on s'attendait :

$$N_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(I_n + N) := \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(-1)^{p-1}}{p} N^p.$$

En particulier,

$$\frac{N_k}{k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 7. Observons déjà que si A et B sont codiagonalisables alors si $P \in GL_n(\mathbb{R})$ est la matrice de passage commune telle que $A = PD_1P^{-1}$ et $B = PD_2P^{-1}$ où D_1 et D_2 sont diagonales, alors l'hypothèse se réécrit : $\exp(D_1) = \exp(D_2)$. L'exponentielle d'une matrice diagonale est la matrice diagonale des exponentielles des coefficients diagonaux. Par injectivité de l'exponentielle réelle, on en déduit que A et B ont les mêmes valeurs propres et sont codiagonalisables : A et B sont donc égales. Reste donc à prouver que A et B commutent (car alors (HP) elles sont codiagonalisables). Pour cela on ruse un peu et on remarque que A commute à $\exp(A)$ donc à $\exp(B)$. Pour montrer que A commute aussi à B, on va montrer que B est un polynôme en $\exp(B)$.

On écrit $B = PDP^{-1}$, de sorte à ce que si $Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$Q(\exp(B)) = PQ(\exp(D))P^{-1}.$$

Posons $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On a donc

$$Q(\exp(B)) = P\mathrm{Diag}(Q(e^{\lambda_1}), \dots, Q(e^{\lambda_n}))P^{-1}.$$

Prenons alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$ (à construire avec des polynômes interpolateurs de Lagrange). On a alors

$$Q(\exp(B)) = B.$$

D'où le résultat.

Ce résultat est intéressant à retenir, il constitue un outil (ou bien une piste de réflexion) qui peut servir dans un oral ardu.

Exercice 8. On rappelle que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une isométrie linéaire pour une norme N définie sur $\mathbb{R}^n$, si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$N(Ax) = N(x).$$

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si A est une isométrie linéaire, il en est de même pour A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Et si $X \in \mathbb{R}^n$, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$N(A^k X) = N(X).$$

D'où le résultat.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Notons d'abord que si l'on décompose $Z \in \mathbb{C}^n$ comme $Z = X + iY$ où $X, Y \in \mathbb{R}^n$ alors on remarque que $\{A^k Z,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est bornée pour tout $Z \in \mathbb{C}^n$. Dés lors si α est valeur propre complexe de A et Z est un vecteur propre complexe associé, la suite $(A^k Z)_{k\in\mathbb{Z}} = (\alpha^k Z)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée et donc $|\alpha| = 1$. Les valeurs propres de A sont de module 1. Montrons que A est diagonalisable. On utilise une décomposition de Dunford (seule l'existence est nécessaire et elle est facile à prouver). On écrit $A = D + N$ où D diagonalisable et N nilpotent avec $DN = ND$. Montrons que $N = 0$. Supposons N non nulle. On dispose de $X \in \mathbb{C}^n \setminus \ker N$ tel que $N^2 X = 0$ (noyaux itérés). Dès lors, si $k \geq 1$,

$$A^k X = D^k X + kD^{k-1} N X.$$

Or D est diagonalisable de valeurs propres de module 1 est donc $(D^k X)_{k\geq 0}$ est bornée. Or,

$$\|A^k X\| \geq k\|D^{k-1} N X\| - \|D^k X\|.$$

Il est facile de voir que le terme de droite diverge quand $k \to +\infty$, ce qui est absurde.

$(iii) \Rightarrow (i)$ On suppose A diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et on note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ses valeurs propres complexes (de module 1) comptées avec multiplicité et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres associés. On introduit sur $\mathbb{C}^n$ la norme N définie pour $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ par

$$N(X) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Cette norme se restreint en une norme sur $\mathbb{R}^n$ et on vérifie que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$N(AX) = N(X).$$